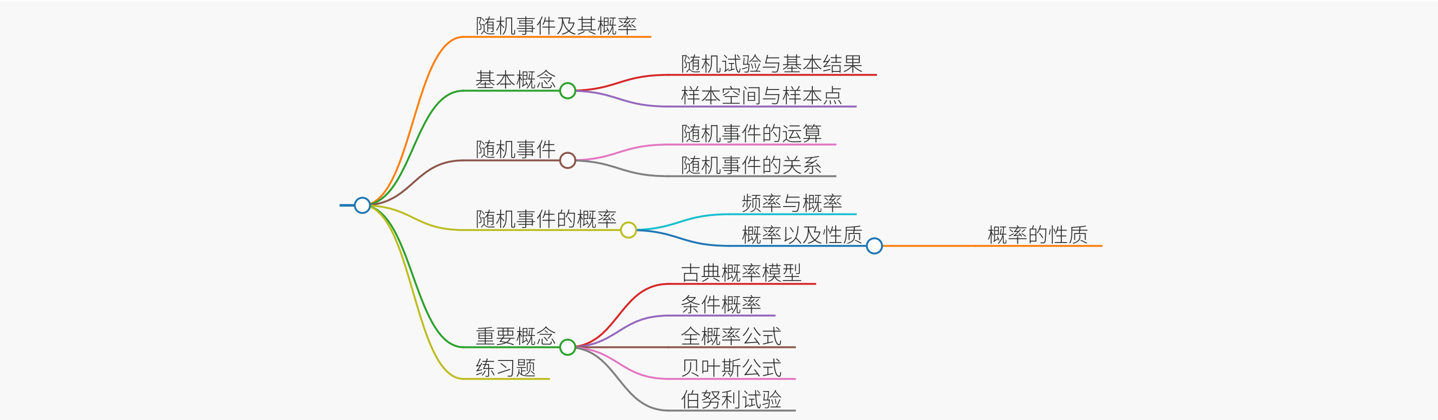

随机事件及其概率

Briefly Abstract

基本概念	随机事件	重要概念
随机试验	**定义**	**古典概率模型**
基本结果	**运算及运算律**	**条件概率**
样本空间	**关系**	**全概率公式与贝叶斯公式**
样本点	**概率的定义以及性质**	**伯努利试验**

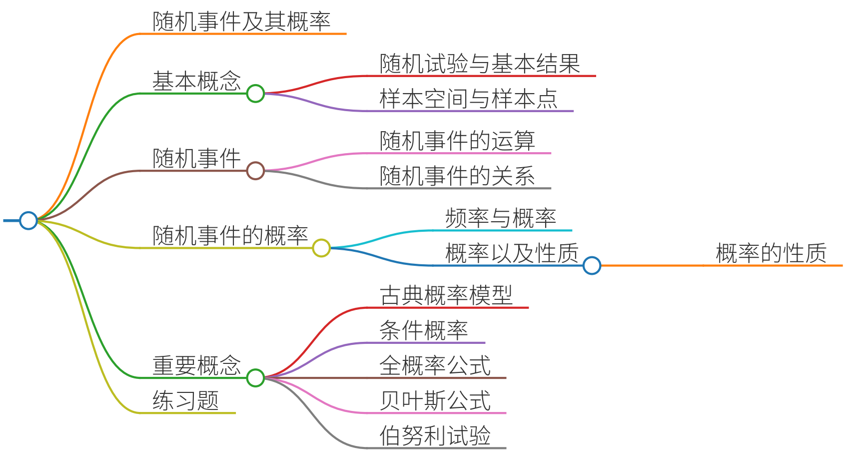

Image 1

随机事件及其概率

基本概念

1. 随机试验与基本结果
2. 样本空间与样本点

随机事件

1. 随机事件的运算
2. 随机事件的关系

随机事件的概率

1. 频率与概率
2. 概率以及性质

2.1 概率的性质
重要概念
1. 古典概率模型
2. 条件概率
3. 全概率公式
4. 贝叶斯公式
5. 伯努利试验
练习题

基本概念

1. 随机试验与基本结果

随机试验: 简称试验,一般用大写字母E(Experiment)来表示.满足以下三个特征:

1. 重复性:实验条件等可以复现.
2. 多样性:可能的结果不止一个,并且所有可能的结果已知.
3. 随机性:每个可能的结果随机出现.

基本结果: 试验中出现的各种可能结果.

2. 样本空间与样本点

> Tip
> **Definition:**
>
> 1. 样本空间: *试验*中所有可能出现的基本结果所组成的集合称为试验的 **样本空间(Sample Space)**,用大写字母 S 来表示.
> 2. 样本点:样本空间S中的基本元素,试验中的基本结果,称为样本点.

随机事件

> Tip
> **Definition:**
> *随机事件*是样本空间S的子集,一般用大写字母$A, B, C, \cdots$来表示.只包含一个样本点的随机事件称为 *基本事件*.包含所有样本点的随机事件称为 *必然事件*.由定义,事件$\emptyset$不包含任何样本点,称为 *不可能事件*.

1. 随机事件的运算

对随机事件$A, B, C, \cdots$ 有如下 *运算关系*:

1. 事件的和: 称事件$A \cup B = \{x|x \in A或者x \in B\}$为事件$A$与事件$B$的和事件.
2. 事件的积:称事件$A \cap B = \{x|x \in A且x \in B\}$为事件$A$与事件$B$的积事件.
3. 事件的差:称事件$A - B = \{x|x \in A且x \notin B\}$为事件A与事件B的差事件.事件$A$发生而事件$B$不发生,即$A - AB$

运算律:

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$
2. 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. 分配率: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. 对偶律: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$; $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

其中,分配律和对偶律均可推广到有限个事件.

2. 随机事件的关系

1. 包含关系: 称$\{x|对\forall x\in B,x\in A成立\}$为$B\subset A$,事件$B$为事件$A$的子集.
2. 相等关系: 若存在 $A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A,B相等.
3. 互斥关系: 若存在$A\cap B=\emptyset$,则事件A,B不可能同时发生,称为互斥事件.
4. 对立关系: 若存在$A\cap B=\emptyset,且A\cup B=S$,即事件$A=B^{\complement}$,称为对立关系.

随机事件的概率

1. 频率与概率

频率: 在某n次试验中,事件A发生的次数为N,称比值$\frac{N_A}{n}$为事件A在这n次试验的**频率**.

频率的基本性质:

1. 非负性: $0\le f_n(A)\le 1$
2. 规范性: $f_n(S)=1$
3. 可加性; 若事件$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$互不相容,那么

$$f_n(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+f_n(A_3)+\cdots+f_n(A_k) \tag{1}$$

当试验次数n逐渐增大时,频率$f_n(A)$逐渐趋于某一常数,这个常数称为事件A的概率.

2. 概率以及性质

概率: 当试验次数$n\to\infty$时,事件A发生的频率$f_n(A)$在一定意义下曲靖于事件A发生的概率$P(A)$.

2.1 概率的性质

1. 对于不可能事件$\emptyset$,概率$P(\emptyset)=0$
2. 概率的有限可加性:

$$P(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+f_n(A_3)+\cdots+P(A_k) \tag{2}$$

3. 对于对立事件$A,\bar{A}$,其概率有$P(A)=1-P(\bar{A})$

   简要证明: $1=P(S)=P(A\cup\bar{A}),根据2,=P(A)+P(\bar{A}).\square$
4. 对于包含事件:$B\subset A$,其概率$P(A-B)=P(A)-P(B)$

   简要证明:由关系$B\subset A$,那么$A=B\cup(A-B)$,$P(A)=P(B\cup(A-B)),再有2,=P(B)+P(A-B)\square$

此外:由概率的非负性,那么$P(A)-P(B)\geq 0 \Longleftrightarrow P(B)\leq P(A)$

5. 概率的加法公式: 对任意两个事件A,B,可以推广到多个事件

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{3}$$

对多个事件如A_1,A_2,A_3,

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3) \tag{4}$$

重要概念

1. 古典概率模型

又称为等可能概率模型,事件A发生的概率为:

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件}}{S\text{包含的基本事件}} \tag{5}$$

2. 条件概率

3. 全概率公式

4. 贝叶斯公式

5. 伯努利试验

练习题